Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 1, 2011, pág. 73–96

Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema

Óscar Molina[a,*], Carmen Samper[a], Patricia Perry[a], Leonor Camargo[a]

[a] Universidad Pedagógica Nacional, Dpto. de Matemáticas, Bogotá, Colombia.

Resumen. Analizamos la actividad demostrativa de tres estudiantes de un curso universitario de geometría, cuando trabajan colaborativamente en la resolución de un problema. Subyacente a la resolución está la producción de un teorema dentro de una teoría determinada. El análisis se concentra en identificar y seguirles el rastro a las ideas matemáticas surgidas, y en identificar, en las acciones de los estudiantes, los tres aspectos que según Habermas caracterizan un comportamiento racional (teleológico, epistémico y comunicativo), con miras a describir la participación de los estudiantes. Los hallazgos nos permiten afirmar que es posible que estudiantes de pregrado produzcan un teorema.
Palabras claves: Producir un teorema, participación, comportamiento racional, actividad demostrativa, geometría euclidiana, educación universitaria.
MSC2000: 97E50, 97A99, 97E50, 97E50, 97G99, 97A99.

Proving activity: participating in the production of a theorem

Abstract. We analyze the proving activity of three students of a university geometry course, when they were working collaboratively to solve a problem. Underlying the solution process is the production of a theorem within a determined theory. With the purpose of describing the students' participation, the analysis concentrates in identifying and keeping track of the mathematical ideas that emerge and in identifying, in the students' actions, the three aspects that, according to Habermas, characterize a rational behavior (teleological, epistemic and communicative). The findings permit us to affirm that undergraduate students can produce a theorem.
Keywords: Produce a theorem, participation, rational behavior, proving activity, Euclidean geometry, university education.

* Autor para correspondencia: *E-mail*: ojmolina@pedagogica.edu.co
Recibido: 15 de abril de 2011, Aceptado: 10 de junio de 2011.

1. Introducción

¿Es razonable pretender que estudiantes de un curso de geometría plana en el nivel de pregrado produzcan un teorema? Somos conscientes de los problemas que enfrentan quienes pretenden enseñar o aprender a demostrar (e.g. [1], [4], [7]). Sin embargo, la experiencia como investigadores y profesores universitarios de un curso de geometría, cuya meta es que los estudiantes avancen en aprender a demostrar, nos impulsa a dar una respuesta positiva a la pregunta.

Para respaldarla, en este artículo presentamos un estudio sobre la actividad demostrativa de un grupo de tres estudiantes a quienes se les pidió resolver un problema; en él analizamos el proceso de generación y desarrollo de ideas matemáticas subyacentes a la producción de un teorema. El análisis está guiado por nuestra concepción de aprender a demostrar y la relación que establecemos entre esta y el modelo de comportamiento racional de Habermas, tal como lo adaptan Morselli y Boero [5].

La primera sección del artículo incluye los referentes teóricos del estudio; en la segunda se contextualiza el estudio, precisando el problema propuesto a los estudiantes, dando detalles de los estudiantes y del contenido del curso, y esbozando la actividad demostrativa que consideramos deseable como proceso de solución al problema; en tercer lugar, se hace un rastreo y análisis de las ideas matemáticas surgidas en la actividad de los estudiantes; y por último, se presentan algunos comentarios finales.

2. Marco de referencia del estudio

Entendemos como *actividad demostrativa* la realización de acciones que conforman dos procesos, no necesariamente independientes. El primero consta de acciones relativas a la producción de una conjetura; ellas generalmente incluyen la exploración de una situación geométrica para buscar regularidades (usualmente con el uso de un programa de geometría dinámica), la formulación de conjeturas y su verificación de manera empírica. Las acciones del segundo proceso se concentran en la búsqueda y organización de las ideas que conformarán una justificación, siendo una forma de esta la *demostración*, es decir, un argumento de naturaleza deductiva basado en un sistema teórico de referencia en el cual la conjetura puede llegar a considerarse un teorema. Además, adherimos a Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti [2], para quienes un *teorema matemático* es un sistema conformado por un enunciado, su demostración y la teoría que la guía y enmarca. Así, que los estudiantes produzcan un teorema significa que se involucran en los dos procesos que conforman la actividad demostrativa asociada a la resolución de un problema.

En consonancia con la conceptualización de *actividad demostrativa*, adoptamos un enfoque participacionista del aprendizaje [8]. Para nosotros, *aprender a demostrar* implica un cambio en la manera en que los estudiantes participan en la actividad demostrativa que se despliega en el aula para desarrollar el contenido geométrico del curso; tal cambio se expresa en una participación cada vez más genuina, más autónoma y más relevante. En Perry, Samper y Camargo [6] identificamos acciones realizadas por los estudiantes que nos permitieron especificar características de tal participación en el marco de una conversación instruccional [3]. Consideramos también importante caracterizar la participación en términos de la generación y el desarrollo de ideas matemáticas, por parte de los estudiantes, para producir un teorema. Por ello, en este estudio decidimos considerar adicionalmente, tres aspectos (epistémico, teológico y comunicativo) a los que aluden Morselli y Boero [5], quienes los adoptan del modelo que Habermas ha elaborado del comportamiento racional, por su relación con los elementos que caracterizan nuestra concepción de aprender a demostrar. Aunque no suponemos una correlación directa entre estos dos marcos de referencia, vemos factible hacer las siguientes dos asociaciones que nos sirven como herramienta analítica:

Características de la participación		Aspectos del comportamiento racional
Autónoma: se activan recursos propios para comunicar y justificar las ideas propias, y para confrontar y entender las de los demás.	Se asocia con los aspectos	*Epistémico:* referido al control de los requerimientos establecidos por la comunidad de discurso matemático y a la consciencia de la necesidad de validar las ideas tomando en cuenta las premisas compartidas y las formas legítimas de razonar. *Comunicativo:* tiene que ver con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático.
Relevante: se hacen contribuciones que tienen algún desarrollo, o que son tenidas en cuenta, y que de alguna manera son útiles para la actividad en que están involucrados, incluso si tienen errores.	Se asocia con el aspecto	*Teleológico:* referido a enfocarse en una meta, formular un plan o desarrollar uno (quizá no formulado) para alcanzar la meta, escoger estrategias que puedan contribuir a llevar a cabo el plan, tener la meta bajo control.

Genuina: se asume una disposición de compromiso y se muestra interés auténtico en busca de lograr la producción de un teorema.		

3. Contextualización del estudio

La actividad que aquí vamos a reportar –y que podría considerarse como algo inusual– está influida en gran medida por la aproximación metodológica a la que han estado expuestos los estudiantes en los cursos de geometría que han cursado en la Universidad Pedagógica Nacional, donde adelantan estudios de Licenciatura en Matemáticas. Para que el lector cuente con elementos que le permitan ver que el caso aquí analizado no constituye una situación atípica, es pertinente mencionar tres aspectos característicos de la aproximación metodológica que usamos para enseñar a demostrar, que es producto de un proceso de innovación curricular que comenzó en 2004. En primer lugar, las soluciones que los estudiantes dan a los problemas geométricos que les plantea el profesor son la fuente principal para proveer elementos que contribuyen al desarrollo del contenido del curso. En segundo lugar, la interacción entre profesor y estudiantes o entre estudiantes es la manera privilegiada de desarrollar el contenido del curso y de apoyar el aprendizaje individual. En tercer lugar, el uso de un *software* de geometría dinámica (para este caso, de Cabri) es un medio para viabilizar la participación de los estudiantes; este recurso les proporciona un entorno en el que acciones como la exploración empírica, la comunicación, y la validación de los enunciados se pueden propiciar.

3.1. El problema propuesto a los estudiantes

En una sesión de clase, de hora y media, tres estudiantes trabajaron colaborativamente en la solución del siguiente problema:

> En la calculadora, construya una $\odot C$ y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia. ¿Para qué cuerda $\overline{AB}$ de la misma circunferencia, que contenga a dicho punto, se tiene que el producto de $AP \times BP$ es máximo?

Como era usual en el curso, debían reportar por escrito los detalles de la construcción en Cabri, formular la conjetura obtenida a partir de la exploración empírica y efectuar la respectiva demostración. Trabajaron sin la intervención del profesor; la observadora del grupo, quien tomó el registro de audio y video, sólo intervino para favorecer la exposición de ideas por parte de los estudiantes o para obtener información más completa del proceso que se llevaba a cabo.

3.2. Los estudiantes y el contenido del curso

Los estudiantes estaban comenzando el tercer curso de geometría. Habían vivido nuestra aproximación metodológica desde su primer curso de geometría en la universidad. Con respecto al contenido geométrico, en el momento de enfrentarse al problema, ellos habían estudiado temáticas relativas a congruencia de triángulos, paralelismo de rectas y cuadriláteros. Respecto a la semejanza de triángulos, habían tratado su definición, los criterios para determinarla y los teoremas de Ceva y Menelao. Tenían experiencia en demostrar propiedades que se deducen de la semejanza de triángulos y en usar la semejanza para demostrar otras propiedades geométricas. En relación con la circunferencia habían discutido, desde un punto de vista teórico, sobre la existencia de cuerdas, diámetros y rectas secantes. No se habían estudiado las relaciones entre las medidas de ángulos y de arcos de la circunferencia. Con el problema propuesto se pretendía introducir el estudio de una de estas relaciones. El grupo de estudiantes cuya actividad vamos a describir no presenta características especiales, en aquello que nos interesa analizar, con respecto a los otros grupos.

3.3. Esbozo de la actividad demostrativa deseable en la solución del problema

La actuación deseable de los estudiantes debía girar en torno a la realización de acciones que les permitieran alcanzar el objetivo general o reconocer y lograr los subobjetivos en el transcurso del proceso de solución. Para este caso, el objetivo se focaliza en la producción del teorema que afirma que, dada una circunferencia y un punto fijo P en su interior, el producto de las medidas de las longitudes de los segmentos determinados por P en cualquier cuerda que contiene a P es constante; esto supone generar la conjetura como producto de una exploración empírica, ubicarla en un cuerpo teórico y demostrarla dentro de este. Así, estos tres asuntos se convierten en los subobjetivos. Las acciones correspondientes al primer subobjetivo son: modelar la situación en el entorno Cabri, explorar con apoyo del arrastre y la medición, determinar una regularidad, verificarla con una nueva exploración y producir un enunciado condicional que reporte la regularidad. Con respecto a los otros dos subobjetivos, son varias las acciones esperadas. En primer lugar, enriquecer la figura, si es necesario, para favorecer la búsqueda de ideas con miras a la demostración. Para este caso los estudiantes deben construir una cuerda auxiliar que contenga al punto P, como estrategia para justificar la conjetura. Cabe resaltar que tal construcción se puede utilizar para verificar el invariante establecido, acción que formaría parte del primer subobjetivo. En segundo lugar, usar las dos cuerdas para determinar dos triángulos, visualizar o conjeturar su semejanza, y en ese marco teórico, justificar la igualdad de los productos involucrados en la conjetura. En tercer lugar, utilizar criterios para establecer la semejanza (ángulo-ángulo para este caso), para lo cual podría ser necesario que los estudiantes realicen una nueva exploración con geometría dinámica con miras a identificar ángulos correspondientes congruentes que no fueran los opuestos por el vértice. Esta exploración podría favorecer el descubrimiento del teorema que reza: *Ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden el mismo arco, son congruentes*, y que justifica la congruencia referida.

Cabe señalar que la descripción hecha de la actividad demostrativa deseable atiende tanto al aspecto teleológico como al epistémico y al comunicativo. Al primero, siempre que esté presente una intención de llegar a algo y un plan para lograrlo. Al segundo, cuando se reconoce la pertinencia de la *semejanza de triángulos* como marco teórico de la justificación que han de hacer y del criterio *ángulo-ángulo* para establecer la semejanza, y la necesidad de otra pareja de ángulos congruentes para poder usar el criterio y poder justificar la semejanza usando un teorema que ellos descubren. Al tercero, cuando al formular la conjetura se mencione que el producto es constante para toda cuerda que contiene a P, y que la alusión a dos cuerdas, nombrándolas por sus extremos, facilita expresar su conclusión y realizar el proceso necesario para la demostración. También, cuando se use el lenguaje matemático adecuado para escribir la conjetura y su demostración.

4. Rastro de las ideas matemáticas en la producción de un teorema

En esta sección describimos e interpretamos la actividad demostrativa desplegada por el grupo al resolver la situación que se les planteó, atendiendo de manera especial a los aspectos teleológico y epistémico del comportamiento de los estudiantes y a indicios de participación genuina, autónoma o relevante, con lo cual podremos identificar características de su participación, es decir, de su aprendizaje de la demostración. Nos centramos en las ideas matemáticas que surgieron, se desarrollaron, modificaron o no prosperaron durante la actividad de los estudiantes. Destacamos y distinguimos las ideas que responden directamente a la pregunta propuesta en el enunciado del problema y las que presentan, explícita o tácitamente, una justificación a la solución dada. Las ideas que reportamos no las enuncian textualmente los estudiantes; son nuestras interpretaciones (o resúmenes) de las frases que ellos dicen en el transcurso de su actividad.

4.1. Dan su primera respuesta a la pregunta planteada

Los estudiantes leen la situación que se les planteó y, atendiendo la solicitud de explicitar inmediatamente cuál creen que puede ser la respuesta, se involucran en una conversación durante la cual no usan Cabri ni producen representaciones escritas duraderas; tan sólo esbozan con los dedos imágenes efímeras para "mostrar" lo que van diciendo.

En realidad, es Juan quien explicita su respuesta intuitiva y sus compañeros lo escuchan, haciendo ocasionalmente algún comentario breve. El planteamiento de Juan es el siguiente:

> Mientras más cercano esté al centro el punto [P], [el producto] debería ser máximo. [...] ¿Qué pasa si P está más cerca al punto A o a B? Digamos que P esté más cerca a A, ¿entonces altera el producto? [...] Mientras más cerca [esté P de A], entonces va a estar más lejos del centro. Entonces tendría que disminuir el producto. O sea, para nosotros el producto es mayor cuanto más cerca del centro se encuentre P.

Inicialmente los estudiantes no advierten que P es un punto fijo, y creen que se les pide determinar la posición del punto P para el cual el producto $AP \times PB$ es máximo. Bajo esa interpretación, como respuesta a la pregunta surge la primera idea matemática (I_1): *Si P está más cercano al centro, el producto es máximo.* En tal respuesta está presente el aspecto teleológico y, como se verá, con ella se inicia una participación relevante que lleva a una segunda idea. Después de formular su respuesta, Juan mismo comienza a manifestar duda; específicamente se pregunta si el cambio de posición de P tiene efecto en el producto. Para analizar la situación, considera casos extremos con P en posiciones muy cercanas a los puntos A y B, extremos de la cuerda. Surge así la segunda idea como justificación para I_1. (I_2): *Si es más pequeña la distancia de P a alguno de los extremos del $\overline{AB}$, entonces es menor el producto $AP \times PB$* . Dado que activa recursos propios para justificar I_1, vemos manifestación del aspecto epistémico.

La observadora interviene para indicarles que el punto P es fijo, condición impuesta en el problema. Teniendo eso en cuenta, los estudiantes mantienen una conversación en la que aún no trabajan con Cabri ni hacen representaciones escritas, pero que los lleva a modificar su respuesta inicial.

75.	Susana:	Por eso le digo que tiene que hablar es en cuestión de la cuerda. Cuanto más cerca esté la cuerda, porque el punto P es fijo. El punto P no se puede mover y ahí tiene que mirar qué cuerda construye y que le quede..., pero esté cerca, bueno espere a ver... [...]
78	Juan:	Ya. Como construyó la cuerda, si tengo el punto P y no lo puedo mover... si construye esta cuerda, puede construir esta también o esta [con un dedo señala lo que podrían ser dos cuerdas de la circunferencia, a las que pertenecería el punto P].

79 Susana:		[Haciendo referencia al esquema imaginario esbozado por Juan] Sí, pero una [cuerda] que no tenga el punto C, porque esta tiene el punto P y el punto C [centro de la circunferencia].
80 Juan:		Pero, sí, claro, puede pasar por C.
81 Susana:		Tiene a P y tiene a C, y esta sería la del producto más grande. La [cuerda] que contiene a C sería [la cuerda para la cual] el producto [es] máximo, la cuerda AB que contiene el punto C.

La revisión que hacen debido a la intervención de la observadora lleva a la transformación de I_1 en (I_3): *La cuerda para la cual el producto es máximo es la que contiene al centro de la circunferencia.* Esta nueva idea tiene en cuenta dos condiciones de la situación, no consideradas en la anterior, que les permiten avanzar en la solución del problema de una forma relevante, pues tienen más claridad con respecto a las condiciones y la pregunta del problema; por una parte, el punto P es fijo, y por otra, la respuesta debe darse en términos de una cuerda que contenga el punto P. Sin embargo, los estudiantes no presentan ningún argumento explícito para validarla.

4.2. Modelan la situación en Cabri y se percatan de un hecho que no coincide con su respuesta inicial

Representan en Cabri la situación planteada en el enunciado para el caso específico en que la cuerda es un diámetro, caso que consideran da solución al problema. Advierten rápidamente que, para poder analizar la situación, tendrían que haber construido una cuerda cualquiera que contuviera al punto P; la construyen sin eliminar la cuerda inicialmente representada, toman las mediciones de las longitudes de los segmentos que P determina en cada cuerda, calculan los dos productos en cuestión y observan que el producto es el mismo. Sorprendidos por el resultado recurren al arrastre de la cuerda que no es diámetro y con ello alcanzan un buen grado de convencimiento de lo que observan. Cuando la observadora les pide un recuento de lo que han hecho, Susana dice:

> Pues es que... Primero construimos así, basados en la hipótesis que habíamos dicho, basados en la cuerda que contenía el punto C. Pero después decimos... nos dimos cuenta que teníamos que mirar primero cualquier otra cuerda. Entonces construimos una recta cualquiera que contuviera el punto P, y los dos puntos de intersección y el segmento. Nos dimos cuenta de que la multiplicación siempre era constante, sin importar donde... Entonces seguimos moviendo los puntos y era constante.

Aunque los estudiantes no se refirieron en momento alguno a un objetivo ni a un plan, sus acciones nos permiten ver lo uno y lo otro: el objetivo era constatar que la respuesta que habían dado era correcta, y el plan consistía en comparar los productos en cuestión para dos cuerdas, la diametral y una representativa de aquellas que contienen a P. Cuando encuentran un resultado que contradice su respuesta, usan de nuevo el plan para un sinnúmero de comparaciones del mismo tipo. Así, encontramos manifestaciones del aspecto teleológico. La exploración empírica de la situación, que realizaron con apoyo de Cabri, les da los argumentos para desechar I_3 y para comenzar a configurar I_4: *El producto de las medidas de los segmentos determinados por P en cualquier cuerda que contenga a P, es constante.* Esta idea matemática incipiente surge mediante inducción empírica. Decimos que es incipiente, pues su cristalización sólo se logrará cuando los estudiantes la formulen explícitamente como un enunciado condicional.

Después de escuchar el recuento, la observadora pregunta si quedaron convencidos. Susana responde: "A menos que hayamos hecho algo mal, pero usted lo mueve y siempre da lo mismo". En esta verbalización vemos una clara manifestación de la influencia de Cabri en el alto grado de certeza que tiene el hecho encontrado para Susana (aspecto epistémico y participación autónoma). Es decir, Susana reconoce a Cabri como artefacto que refleja la veracidad de un hecho y da por sentado que sus compañeros también lo admiten así.

4.3. Tratan de formar una proporción con las medidas tomadas

Inmediatamente después de encontrar, de manera empírica, que el producto en cuestión es constante, surge la pregunta del porqué del hecho observado y comienzan a buscar la justificación para I_4. Juan propone de manera tentativa que: "Tal vez es porque cada vez que uno mueve, este [$\overline{PR}$] se disminuye y este [$\overline{PS}$] aumenta. Pero disminuye proporcionalmente". A lo que Susana interpela: "¿Pero por qué disminuye proporcionalmente? Es que esa es la duda. Porque entonces siempre es… o sea, [las longitudes de los dos segmentos que determina P en las cuerdas] disminuyen y aumentan la misma cantidad". Juan sugiere "Miremos la razón, a ver qué pasa". Esta sugerencia encauza durante unos minutos la actividad de los estudiantes: en Cabri calculan cocientes usando los cuatro números que, sin etiqueta, tienen en la pantalla y que corresponden a las medidas de longitud de los segmentos determinados por el punto P en las dos cuerdas. Este trabajo cuyo objetivo es, aunque ellos no lo explicitan inicialmente, encontrar razones iguales, no les da el fruto esperado, porque no hacen las combinaciones adecuadas, tal como lo señala Juan: "No, la razón no nos da nada".

La intervención de Juan, en la que verbaliza con cierta duda una explicación para el hecho observado empíricamente, y la de Susana que plantea su insatisfacción con tal explicación porque no va al meollo del asunto, nos permiten ver una alusión a la necesidad de justificar y de que la justificación realmente logre explicar por qué sucede lo observado, lo cual refiere al aspecto epistémico del comportamiento racional de los estudiantes. Dado que en sus intervenciones los estudiantes están activando sus recursos propios para proponer y objetar, vemos una muestra de participación autónoma. Posteriormente vemos un plan para tratar de explicar la constancia del producto, y dado que los estudiantes se involucran en su implementación, vemos aquí la presencia del aspecto teleológico y una participación relevante. Ahora bien, consideramos que, en su propuesta, Juan retoma I_2 y la transforma. Así, surge la idea 5 (I_5): *Si la disminución de la medida de uno de los segmentos determinado por P se corresponde proporcionalmente con el aumento de la medida del otro, entonces el producto de dichas medidas es constante.* Sostenemos que es una transformación de I_2 puesto que ésta consideraba que la disminución y el aumento de las medidas de los segmentos determinados por P afectaban el resultado del producto. En I_5 se considera que tal hecho tiene como consecuencia que el producto se mantenga constante.

4.4. Forman una proporción con las medidas, a partir del hecho descubierto

Tomando consciencia de los inconvenientes debidos al registro insuficiente que han realizado (en la pantalla sólo cuentan con números), toman de nuevo las medidas y colocan las respectivas etiquetas. Enseguida, a raíz de la invitación que hace Susana, cambian la manera de abordar la búsqueda, y al hacerlo logran establecer la proporción entre las medidas tomadas.

256.	Susana:	A ver, seamos lógicos, ¿como qué [resultado numérico] nos debería dar? [...]
260.	Juan:	Estamos pensando a ver qué [razones] nos puede[n] dar esa constante, porque no... las razones no nos arrojaron nada. [...]
270.	Juan:	[...] Hasta ahí, ¿qué tenemos? De lo que tiene Susana ahí, nosotros encontramos que AP por BP nos daba una constante, ¿cierto? [Indica a 1.19 en la pantalla de la calculadora].
271.	Susana:	Ajá.
272.	Juan:	Y que RP y SP nos daba la misma constante, o sea que son iguales.
273.	Susana:	[Ha escrito en su cuaderno: $PA \times PB = PR \times PS$. Señala en esa expresión los términos a medida que los va mencionando y que va escribiendo la otra expresión] ¿PA sobre PS, igual a... PR...? [Escribe en el cuaderno: $\frac{PA}{PS} = \frac{PR}{PB}$].

La propuesta desarrollada por Susana y Juan se basa, por una parte, en usar el hecho empírico encontrado al explorar la situación en Cabri ($PA \times PB = PR \times PS$)

y, por otra parte, en recurrir a la teoría de proporciones para obtener una conclusión plausible; los estudiantes se involucran en una argumentación de tipo abductivo (aspecto epistémico). Ello porque tienen la conclusión y buscan posibles datos que serían la hipótesis de teoremas que permitirían deducir la conclusión. Así, conectada con I_5 surgió (I_6): *Si* $\frac{PA}{PS} = \frac{PR}{PB}$ *entonces* $PA \times PB = PR \times PS$, idea importante para avanzar en la actividad demostrativa por cuanto indica qué segmentos conviene relacionar para demostrar la constancia del producto. Vemos una manifestación clara del aspecto epistémico de su comportamiento, pues la idea nueva está fundamentada en la teoría (de proporciones).

Se da posteriormente una conversación entre los estudiantes en la que revisan su trabajo anterior con la intención de ver en qué fallaron, y notan que habían encontrado el cociente $\frac{PA}{PB}$ y no el cociente $\frac{PA}{PS}$. Juan pide que se verifique que la proporción formada por ellos [273] en efecto es la correcta, y la respuesta de Susana es: "Se supone que tiene que salir; en teoría debería ser así". Adicionalmente, ellos explicitan que hay dos proporciones posibles, la ya mencionada y $\frac{PA}{PR} = \frac{PS}{PB}$. En la participación autónoma de Susana, cuando recurre motu proprio a su conocimiento sobre proporcionalidad con el propósito de desvelar cuáles son las razones que llevan a la conclusión sobre la constancia del producto, es evidente que ella asume el control del curso de la actividad teniendo como guía la teoría, y al hacer la llamada de atención, "seamos lógicos", que evidencia su rol, muestra su involucramiento en la actividad matemática que están llevando a cabo y, con ello, su participación genuina.

4.5. Mencionan la semejanza de triángulos

Habiendo establecido las razones apropiadas para que el producto constante sea consecuencia de la correspondiente proporción, y sin tener aún triángulos en la figura sobre la que están trabajando (Figura 1), se hace la primera mención a la semejanza de triángulos.

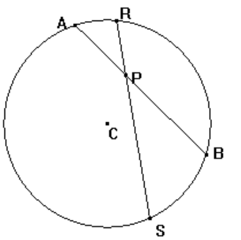

Figura 1.

324.	Susana:	¿Sí dio [la igualdad de razones]? En teoría, tendríamos ahí triángulos semejantes, ¿no?
325.	Juan:	¿Triángulos?
326.	Susana:	Triángulos semejantes.
327.	Juan:	Sí, sí, sí.
328.	Susana:	O sea, lo que tenemos dibujado son triángulos semejantes.
329.	Juan:	En teoría, sí.
330.	Susana:	Bueno, no hemos dibujado triángulos como tal, ¿sí? Pero implícitamente hay triángulos semejantes.
		[...] [Discusión enfocada en la formulación de la conjetura].
481.	Susana:	Los triángulos serían semejantes.
482.	Juan:	O sea, ¿construimos los triángulos?
483.	Susana:	Sí, ahí hay semejanza.

Probablemente, haber podido expresar la igualdad de los productos como una proporción se constituye para los estudiantes en índice de la plausible pertinencia de la teoría de la semejanza de triángulos para la solución que están construyendo. Así, como argumento abductivo surge (I_7): *Si los triángulos son semejantes entonces* $\frac{PA}{PS} = \frac{PR}{PB}$. Una vez terminado el proceso de escribir la conjetura de manera que ella exprese claramente la generalidad de lo encontrado, cuestión que se aborda en el siguiente fragmento, Susana vuelve a evocar la teoría de semejanza de triángulos [481], con lo que insinúa de nuevo que ese es el marco en el que pueden encontrar una explicación para su resultado. La reiterada mención que Susana hace de la semejanza de triángulos y el hecho de que hasta ese momento ni han verificado empíricamente la semejanza ni tienen representados los triángulos, nos indican que Susana está convencida de la razonabilidad de la conjetura desde un punto de vista teórico (aspecto epistémico). Además, como se verá más adelante, el hecho de que la teoría de semejanza llega a ser el espacio de trabajo en el que se hace la demostración, es un indicador que anticipa la participación relevante de Susana.

4.6. Formulan la conjetura como una condicional

Hasta la intervención [330], los estudiantes han realizado un proceso de búsqueda de explicación de la regularidad encontrada, pero no han establecido su conjetura como una condicional que incluya las condiciones dadas y la consecuencia obtenida. Ahora, se dedican principalmente a formular tal enunciado. En la conversación que sostienen podemos evidenciar los problemas a los que se enfrentan: mencionar en el antecedente de la condicional una o dos cuerdas, y en el consecuente referirse al producto constante o escribir la proporción. Cuando para el consecuente se inclinan hacia la primera posibilidad, pretenden encontrar una relación que les permita escribir la constante en términos de, por ejemplo, el radio de la circunferencia y la distancia de P al centro. Para ello evocan el Teorema de Tales (que ya ha sido estudiado en el curso), pero no hay registro de un análisis que los llevara a aceptar esa teoría como pertinente o los condujera a rechazarla. En últimas, escriben la conjetura en términos de dos cuerdas y la igualdad correspondiente entre dos productos. También encontramos que en cierta forma les molesta que a la pregunta "¿cuál es la cuerda para la que el producto es máximo?" se responda con "para cualquier cuerda el producto es constante". A continuación, sin pretender mostrar el diálogo mismo y las circunstancias en las que se dio, presentamos intervenciones de los estudiantes que sustentan la descripción anterior.

> No, espere, ¿cómo lo vamos a formular bien? No, no. Sería que para cualquier cuerda AB, que contiene al punto P, se cumple que PA por PB es igual a un valor constante. Pero, ¿cómo lo pondríamos ahí? Para cualquiera es máxima, para cualquiera tienen el mismo valor, o sea no hay máxima. O pongamos... deberíamos mencionar dos cuerdas, diría yo, ¿no?, que contenga a ese punto P, para poder decir que la relación es la misma. Porque tenemos una constante y ¿cómo nombramos una constante ahí? Para nombrar que son constantes tendríamos que nombrar por lo menos dos cuerdas ¿no le parece? Porque... Y ¿ahora cómo lo vamos a demostrar? [Susana].
>
> Entonces necesitamos otra cuerda para que hubiese proporción con relación a algo. [Felipe].
>
> Sí, claro, entonces tendríamos que enunciar la conjetura nombrando dos cuerdas, por lo menos dos. [Susana].
>
> [Ha escrito lo siguiente: Dada la circunferencia con centro en C y un punto P que pertenece al interior de la circunferencia, si $\overline{SR}$ y $\overline{AB}$ son dos cuerdas tal que P pertenece a $\overline{AB}$ y a $\overline{SR}$, entonces $PA \times PB = PR \times PS$] [Felipe].

En el episodio relatado nos es evidente un interés por encontrar una manera apropiada de reportar el hecho de que para cualquier cuerda que contenga a P, el producto es constante. No percibimos una nueva idea matemática que sea, o bien respuesta al problema, o bien justificación a la misma. No obstante, examinemos someramente el comportamiento de los estudiantes, particularmente el de Susana, quien sugiere, motu proprio, considerar una cuerda auxiliar que les fue útil para formular la conjetura de manera que hiciera viable la demostración (i.e., hacer operativo en esta el significado de "el producto es constante"). La idea de construir una cuerda auxiliar es evidencia de una participación relevante y autónoma. Percatarse de la necesidad de comparar dos objetos en igualdad de condiciones para demostrar que un valor numérico relacionado con ellos es constante y de esa manera encontrar una estrategia que les permite avanzar en la solución del problema (aspecto teleológico), muestra la madurez matemática que han alcanzado los estudiantes (aspecto epistémico). La participación autónoma se concreta no sólo en la preocupación por expresar adecuadamente la generalidad del hecho en cuestión, sino también en el ser consciente de que la manera de formular el consecuente de la conjetura puede aclarar u opacar lo que se pretende justificar (aspecto comunicativo). En resumen, en este fragmento identificamos no una idea matemática nueva, diferente a I_7, pero sí la realización de una acción matemática que es evidencia de una actividad matemática cercana a la de un experto.

4.7. Examinan brevemente teoremas tratados en el curso

La pregunta de Juan, "¿Cómo se va a demostrar eso, Susana?", da inicio al proceso de construcción de la demostración de la conjetura formulada. Aunque en la representación en Cabri aún no tienen triángulos, hay alusión a que "los triángulos serían semejantes". Pero es evidente que en este momento no ven claramente cómo abordar tal idea; así lo explicita Susana al decir "Yo no sé, es como difícil". Al parecer, ella cree que considerar un caso puede ayudarles: "No, un ejercicio más fácil", y probablemente impulsada por esta idea, muestra por qué el caso que deben estudiar no es aquel en que los puntos C y P coinciden. "El ejemplo cuando P es igual a C... se tendría r por r, r cuadrado, y r por r, r cuadrado", pero inmediatamente agrega que "El problema sería cuando P es otro punto distinto a C, como lo dice el problema original". No obstante, tal comentario no impide que Felipe sugiera un plan para la búsqueda teórica de una justificación, como se vislumbra en las siguientes intervenciones:

> Cuando P es igual a C, [la razón] es igual a 1 ¿cierto? [Relata a la observadora lo que están haciendo]. Estábamos tratando de ver si encontrábamos alguna relación de tal manera que nos diera como uno, o una cosa así, más fácil para mirar. [...] Porque pues... tenemos unos teoremas de proporcionalidad que están igualados a uno. Entonces pensé que por ahí podríamos hacer la demostración, bueno [Felipe].
>
> Pues... [hemos pensado en] Ceva y Menelao, la multiplicación... [Susana].
>
> Los productos con igualdad uno, para ver qué nos da [Felipe].

Al considerar el caso en que C y P coinciden, surge la idea 8 (I_8): *Si los puntos C y P coinciden, entonces* $\frac{PA}{PS} = \frac{PR}{PB} = 1$. Aunque se percatan de que la especificidad del caso los distancia de la generalidad involucrada en la situación que están tratando de resolver, lo consideran porque creen que pueden hacer uso de elementos teóricos con los que ya cuentan (como los Teoremas de Ceva y Menelao) en la justificación. Considerar casos específicos para intentar involucrar teoremas que conocen es evidencia de un comportamiento teleológico, y reconocer que dicha propuesta no puede trascender es una participación relevante en la medida en que encauza la búsqueda, de nuevo, hacia el camino delimitado por la semejanza de triángulos. Teniendo como consecuente que las razones son iguales a 1, los estudiantes evocan teoremas en los que en el consecuente se mencionan elementos igualados a 1. Felipe ha asociado erróneamente razón igual a 1 con el consecuente de los teoremas de Ceva y Menelao, en los que se establece que el producto de unas razones es igual a 1. Susana, quien controla lo relacionado con la teoría, alcanza a mencionar que esos teoremas tratan sobre productos de razones, cosa que no tienen (aspecto epistémico). La participación de Susana es autónoma, pues saca a la luz que el caso particular no es útil para determinar lo que se quiere cuando P es cualquier punto.

4.8. Vuelven a la semejanza de triángulos como marco para hacer la demostración

La conversación en la que consideran el caso particular en que C y P coinciden tiene intercaladas intervenciones de los estudiantes en las que aluden a la semejanza de triángulos:

513.	Juan:	¿Para semejanza qué tenemos?
514.	Susana:	Para semejanza tenemos los criterios.
		[. . .]
517.	Juan:	Pero... ¿aquí, qué tenemos?
518.	Susana:	Es que aquí sólo tenemos dos ángulos congruentes, y pare de contar.
		[. . .]
542.	Susana:	Necesitamos otro ángulo, por lo menos.

Aun cuando los estudiantes no mencionan explícitamente el criterio ángulo-ángulo de semejanza de triángulos, es claro que se están refiriendo a él, pues Susana alude al par de ángulos que pueden asegurar congruentes y menciona la necesidad de establecer la congruencia de otro par de ángulos (aspecto epistémico). Al evocar de nuevo la teoría de semejanza de triángulos surge la idea 9 (I_9): *Dados dos triángulos, si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.* El fragmento muestra una participación relevante y autónoma de parte de Juan, pues con sus preguntas insinúa que se deben adentrar en la semejanza de triángulos para determinar de manera más puntual qué elemento teórico podrían usar para justificar su conjetura, y además con qué condiciones cuentan [aspecto epistémico]. Es relevante el comentario de Susana en cuanto a la necesidad de otro par de ángulos, pues está relacionada con la solución al problema, y el grupo se concentra en estudiar condiciones para garantizar dicha semejanza. El episodio de la siguiente sección ilustra en parte dicha trascendencia.

4.9. Proponen una construcción auxiliar en busca de las condiciones para aplicar el criterio de semejanza ángulo-ángulo

Movidos por la necesidad de declarar la congruencia de dos pares de ángulos para poder usar el criterio ángulo-ángulo de semejanza triangular, y dado que hasta ahora sólo reconocen la congruencia de un par de ángulos, los estudiantes proponen construcciones auxiliares, lo que consideramos como una acción matemática destacable. Representan en papel dos cuerdas que se intersecan en un punto P y dos de los triángulos que se determinan (Figura 2). Después surgen dos propuestas para construir una recta paralela: (i) una recta que contiene a P, paralela a uno de los lados de uno de los triángulos (Figura 3), y (ii) una recta paralela al mismo lado escogido anteriormente, pero que contenga uno de los vértices, diferente a P, del otro triángulo (Figura 4). Sin embargo, los estudiantes no explicitan por qué una relación de paralelismo arreglaría el problema. Es probable que estén pensando en ángulos alternos internos entre paralelas, pero no hay mención alguna al respecto. Se entrevé la idea 10 (I_{10}): *Si se tiene una relación de paralelismo, entonces se tienen ángulos congruentes.* Proponer como construcción auxiliar una recta paralela se convierte en un plan para resolver el problema que tienen entre manos (aspecto teleológico y participación relevante).

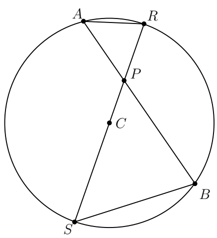

Figura 2.

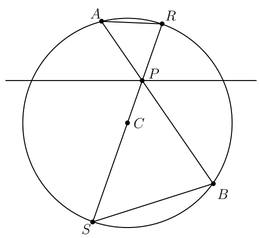

Figura 3.

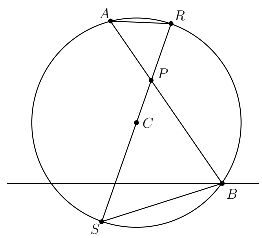

Figura 4.

4.10. Explicitan cuáles son los triángulos cuya semejanza deben demostrar

Ante una pregunta de la observadora, los estudiantes explicitan por primera vez cuáles son los triángulos semejantes involucrados en la situación. Posteriormente, la observadora vuelve a intervenir para llamar la atención sobre la incorrecta correspondencia que están estableciendo, y Susana precisa cuáles son los ángulos correspondientes congruentes. Sin pretender mostrar el diálogo mismo y las circunstancias en las que se dio, presentamos las intervenciones que sustentan la descripción anterior.

> No vemos los triángulos semejantes, o sea, parecieran triángulos semejantes, pero lo único que tenemos en este momento son... dos ángulos [Juan].

> Pero, ¿saben cuáles son los triángulos semejantes? [observadora].
>
> O sea... [triángulo] BPS con [triángulo] RPA, porque las razones de este a este [BP a RP] como este a este [PS a PA], y como tenemos el ángulo... Pero el problema es cómo demostrar ahí. Entonces, bueno sólo tenemos el ángulo [Susana].
>
> Espera, porque primero me habías dicho el ángulo de vértice B con el de vértice A y el de vértice S con el de vértice R [observadora].
>
> Lo que necesitamos es el ángulo... PBS congruente con el ángulo PRA [...] PBS con PRA o PSB con PAR, cualquiera de los dos nos serviría en este caso [Susana].

Vemos aquí dos ideas matemáticas de Susana, cuyo papel en la discusión es precisar la pareja de ángulos cuya congruencia les falta demostrar. Así, se tiene: (I_{11}): *Si* $\frac{BP}{RP} = \frac{PS}{PA}$ *y* $\angle P \cong \angle P$, *entonces* ΔPBS *y* ΔPRA *son semejantes*, cuyo análisis conduce a (I_{12}): *Si* $\angle P \cong \angle P$ *y* $\angle PBS \cong \angle PRA$ *o* $\angle PSB \cong \angle PAR$, *entonces* ΔPBS *y* ΔPRA *son semejantes*. Esta última idea finalmente explicita las parejas de ángulos correspondientes que deberían ser congruentes. Vale la pena mencionar que, si bien I_{11} fue elaborada por Susana de una manera deductiva, aceptando como dato la proporción que habían encontrado de manera empírica, I_{12} fue elaborada a partir de un argumento abductivo, que se evidencia con el uso de la frase de Susana "Lo que necesitamos es el ángulo...". Pasar flexiblemente, en cualquier sentido, de lo abductivo a lo deductivo es una acción matemática destacable en la que reconocemos el aspecto epistémico. Sin embargo, dada la importancia de determinar los ángulos que deben ser correspondientes para obtener la semejanza, el hecho de que haya sido la observadora quien tuvo que sugerir hacerla nos indica que el comportamiento de los estudiantes no fue del todo autónomo. En el diseño de la situación, suponíamos que los estudiantes harían una exploración empírica para determinar los ángulos congruentes. Este es un caso en donde no se puede establecer una asociación explícita entre el aspecto epistémico del comportamiento racional y la participación autónoma de la estudiante. La dedicación de Susana por determinar la semejanza ratifica su participación genuina.

4.11. Construyen un triángulo isósceles en busca de las condiciones para aplicar el criterio de semejanza ángulo-ángulo

En su intento de deducir la congruencia de los ángulos correspondientes de los dos triángulos, los estudiantes siguen proponiendo diferentes construcciones auxiliares. Entre ellas está la propuesta de Susana de construir un triángulo isósceles.

737.	Susana:	¿No podríamos... Felipe... ven Felipe, construir un segmento aquí que fuera congruente...? Igual, este tendría que ser congruente con este y mirar si de pronto esta sería paralela con esta. Y si son paralelas... con eso ya tendríamos que [los ángulos] sí son congruentes.
738.	Obs.:	Me lo explica otra vez, pero nombrando por favor los puntos y todo eso, porque quedé perdida. ¿Cuál es la idea?
739.	Juan:	La idea es construir un segmento congruente a $\overline{PR}$ [Figura 5]. Generar un punto acá [en $\overline{PA}$] pero que este sea congruente con este [$\overline{PR}$] para que este congruente con ...
740.	Obs.:	¡Ah! Ya.
741.	Susana:	Un punto X.
742.	Obs.:	Un punto X en PA, para que sean congruentes PR y PX.
743.	Susana:	Pero espere, porque cambiaría el ángulo [señala $\angle XRP$ y $\angle ARP$].
747.	Obs.:	Cambiaría ¿qué?
745.	Susana y Juan:	El ángulo, al trazar RX.
746.	Juan:	Porque la idea era utilizar alternos internos acá [muestra $\angle PXR$ y $\angle SBX$].

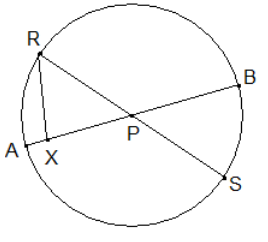

Figura 5.

Susana y Juan están buscando cómo asegurar que los ángulos que han identificado como congruentes efectivamente lo son. Trabajan en la representación sobre papel, guiados por el deseo de encontrar segmentos paralelos y por su conocimiento del teorema según el cual los ángulos alternos internos determinados por rectas paralelas intersecadas por una trasversal son congruentes. El argumento deductivo (aspecto epistémico), que no explicitan pero que entrevemos en este diálogo, es el siguiente: al construir un triángulo isósceles (ΔPRX) con $\overline{PR} \cong \overline{PX}$, si resulta que $\overline{RX}$ es paralelo a $\overline{BS}$, entonces $\angle SBP$ es congruente con $\angle PXR$ por ser alternos internos entre paralelas, y $\angle PXR$ es congruente con $\angle PRA$ por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles. Por tanto, creen que lograrían la congruencia de los $\angle SBP$ y $\angle PRA$. Pero cuando explican su idea a la observadora, los estudiantes reconocen que el argumento es incorrecto porque X no coincide con A. El argumento deductivo se convierte en la idea 13. Es una evolución bastante desarrollada de I_{11}, ya que proponen una construcción auxiliar que dé lugar a ángulos alternos internos congruentes al presuponer el paralelismo de los segmentos. Esquematizamos I_{13} a continuación:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Si en } \triangle PRX,\ \overline{PR} \cong \overline{PX}, & \text{entonces } \angle PRX \cong \angle PXR; \\ \text{Si } \overline{BS} \| \overline{RX}, & \text{entonces } \angle SBP \cong \angle PXR; \end{array}\right\} \text{ luego } \angle PRX \cong \angle SBP.$$

Susana y Juan descartan la propuesta, porque la congruencia sería con el $\angle PRX$ y no con el $\angle PRA$. No desarrollan suficientemente la propuesta para percatarse de que el punto básico de su desarrollo deductivo es cómo demostrar el paralelismo de $\overline{RX}$ y $\overline{BS}$. Todo el argumento implícito depende de ese hecho hipotético. La participación conjunta de los estudiantes, tanto en desarrollar la idea como en descubrir por qué no funciona, todo ello desde la teoría, es una prueba de participación autónoma (aspecto epistémico).

4.12. Construyen un segmento paralelo a uno de los lados de uno de los triángulos involucrados

En un intento de obtener de manera indirecta el paralelismo de una recta con uno de los lados de los triángulos que no contienen a P, Juan propone construir un triángulo congruente a uno de los que tienen en la representación. Para ello, como los lados del ΔPBS, en su representación en Cabri, son de menor medida que los lados del ΔPAR, localizan el punto T en el $\overline{PA}$ tal que $PT = PS$, y el punto Z en $\overline{PR}$, tal que $PZ = PB$ (Figura 6).

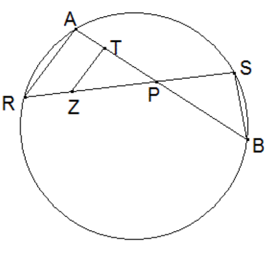

Figura 6.

811.	Juan:	Voy a construir el segmento ZT y mirar si son paralelos. [Busca el paralelismo con el $\overline{AR}$] [...]
813.	Obs.:	Sí. ¿Qué descubriste?
814.	Juan:	Sí,... que sí son paralelos [$\overline{AR}$ y $\overline{TZ}$.]
815.	Felipe:	¿Son paralelas?
816.	Susana:	Sí, Juan Pablo. Pero ahora, ¿cómo demostramos que sí son paralelas?
817.	Juan:	Pues...
818.	Susana:	Eso es lo que no sabemos.
819.	Juan:	La calculadora lo está diciendo; sí son paralelos. [...] [En lo que sigue, Juan le describe a la observadora la construcción que hizo].
841.	Obs.:	¿Pero eso te daría cuáles son ángulos congruentes, entonces?
842.	Juan:	Me daría... que como estos triángulos vendrían siendo congruentes [...]
844.	Juan:	O sea el triángulo PZT sería congruente con... a PBS, ¿sí?, entonces el ángulo P, Z, T sería congruente al ángulo P, B, S.
845.	Obs.:	Ajá.
846.	Juan:	Y ya tendría pues... por transitividad [ángulo] P, B, S sería congruente a [ángulo] P, A, R, pues por la definición de semejanza...
847.	Obs.:	¿P, A, R?
848.	Juan:	P, A..., no... Sí, P, R, A, y ya podríamos usar la definición de semejanza.

Juan decide hacer viable la idea de usar el paralelismo (I_{10}), plan que han venido desarrollando durante la más reciente etapa de su actividad (aspecto teleológico). Realiza una construcción que da lugar a un ángulo congruente ($\angle TZP$) a uno de los dos ángulos que se quieren demostrar congruentes ($\angle PBS$), y que es a la vez correspondiente con el otro ángulo en cuestión ($\angle PRA$). Su propósito es que un lado del ángulo que construye ($\overline{ZT}$) resulte paralelo a un lado del ángulo correspondiente ($\overline{RA}$). Basado en ello, realizan un proceso deductivo que culmina en la justificación de la congruencia de los ángulos objeto de interés. De nuevo, alude a la definición de triángulos semejantes para demostrar la conjetura. El problema que tienen, como lo trata de destacar Susana [816, 818], es que el argumento que da Juan solo es válido si se puede establecer, desde la teoría, que las rectas son paralelas, y no aceptar eso de manera empírica (aspecto epistémico). La participación autónoma que se evidencia aquí es similar a la descrita en el fragmento anterior; sin embargo, en este caso hay un elemento más que fundamenta su propuesta: el uso de Cabri se convierte en la evidencia empírica de la validez de la propuesta.

El proceso realizado por los estudiantes conduce a la idea 14 que se esboza en las intervenciones [844, 846]. Sin hacer explícitos los elementos teóricos correspondientes, deducen la congruencia de los triángulos usando el criterio lado-ángulo-lado; la de los ángulos PZT y PBS, usando la definición de triángulos congruentes; la de los ángulos PZT y PRA, por ser correspondientes entre rectas paralelas, y finalmente, como se expresa en [846], por transitividad se obtendría la congruencia de los ángulos PBS y PRA. La idea 14 se esquematiza así:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } \overline{PZ} \cong \overline{PB},\ \angle ZPT \cong \angle BPS,\ \overline{PT} \cong \overline{PS}, \\ \text{entonces } \triangle PZT \cong \triangle PBS, \\ \text{así que } \angle PZT \cong \angle PBS; \\ \\ \text{Si } \overline{TZ} \parallel \overline{AR} \ \text{ entonces } \ \angle PZT \cong \angle PRA, \end{array}\right\} \text{luego } \angle PRA \cong \angle PBS$$

Las propuestas que dan lugar a las ideas I_{13} e I_{14} son prueba de una participación relevante, porque se fundamentan en la relación de paralelismo, idea que con anterioridad había surgido; en resumen, es una idea que trasciende, se estudia, se desarrolla (aspecto teleológico). Además, estas ideas indican una participación autónoma de los estudiantes, dado que son argumentos deductivos que pretenden justificar una relación de congruencia entre un par de ángulos que permitiría garantizar la semejanza de los triángulos que necesitan para validar teóricamente su conjetura.

4.13. Redacción de la demostración

Preocupados por el poco tiempo que tienen para terminar la tarea, y conscientes de que no han logrado justificar la congruencia del otro par de ángulos que les permitiría deducir la semejanza teóricamente, Susana propone iniciar la demostración. Deciden hacer tan sólo un bosquejo de ella asumiendo la validez de lo que requieren. A continuación, se transcribe la demostración que presentaron los alumnos.

	Afirmación	Justificación
1	$C, P \in \text{int} \odot C$	Dado
2	$\overline{SR}$ y $\overline{SB}$ cuerdas; $P \in \overline{SR}$ y $P \in \overline{AB}$	Dado
3	$\angle SPB \sim \angle APR$	T. opuesto por el vértice
4	Existen $\triangle PBS$ y $\triangle PRA$	Def. de triángulo
	Nota: Nos hace falta que $\angle PBS \sim \angle PRA$ o $\angle PSB \sim \angle PAR$.	
	Teniendo alguna de las congruencias por el criterio de semejanza (AA), $\triangle PBS \sim \triangle PRA$	
5	$\frac{PB}{PR} = \frac{SP}{PA}$	Def. de triángulos semejantes
6	$PB \times PA = PR \times SP$	Álgebra

En el argumento deductivo anterior, además de considerar dos cuerdas para su desarrollo, de las catorce ideas matemáticas que identificamos, los estudiantes usaron tres (I_9, I_7, e I_6) en los pasos 4, 5 y 6, respectivamente. La nota del paso 4 reporta que no pudieron sustentar teóricamente la validez del antecedente de I_9. En la nota reconocemos que los estudiantes son conscientes de que ese paso de la demostración no cumple con lo que la comunidad del aula espera que sea un paso de deducción. Es de notar lo cuidadosos que son en cuanto al estatus de cada elemento teórico usado, sea este postulado, definición o teorema, dentro del sistema teórico que tienen a su disposición. Las dos observaciones anteriores dan muestra del aspecto epistémico.

5. Comentarios finales

En prácticamente todo el curso de la actividad demostrativa a la que nos hemos asomado en este análisis pudimos identificar metas, planes y estrategias de los estudiantes para resolver el problema que tenían entre manos. Esto se constituye en un índice de la presencia del aspecto teleológico en el comportamiento de los estudiantes, aunque no hayan hecho referencias explícitas al respecto.

Proponer lo que identificamos como ideas matemáticas, transformarlas, aceptarlas o rechazarlas, con argumentos basados en el sistema teórico que tenían a su disposición, reconocer la falla en el desarrollo deductivo que presentan como demostración, y pasar flexiblemente de argumentos abductivos a deductivos o viceversa, son acciones que nos muestran el aspecto epistémico en el comportamiento de los estudiantes.

La preocupación por formular la conjetura en el formato de condicional, usando los términos matemáticos adecuados para que ella sea clara y concisa, y a la vez sea un enunciado que facilite el proceso deductivo, y escribir su demostración en el formato aceptado por la comunidad de aula para ese propósito, nos indican el aspecto comunicativo de su comportamiento.

El desempeño de los estudiantes dista aún de la actividad matemática que consideramos como deseable. Prueba de ello es el hecho de que hayan propuesto algunas ideas que no eran aplicables (como cuando sugirieron usar el Teorema de Tales) y no hayan explorado la figura con más cuidado en busca de una relación entre los ángulos de los triángulos y los arcos de circunferencia que interceptan. Su búsqueda, principalmente guiados por su conocimiento teórico, de elementos que pudieran dar lugar a ángulos congruentes, se asemeja al proceder de un matemático, pero no así la visualización matemática y el análisis de la figura. Aun así, nuestro estudio aporta una prueba más de las posibilidades reales de éxito que tiene la aproximación metodológica configurada durante nuestra innovación para favorecer el aprendizaje de la demostración. Ello porque los estudiantes exhibieron un comportamiento racional en el que los aspectos epistémico, teleológico y comunicativo dan cuenta de la participación autónoma, relevante y genuina en la tarea de producir un teorema.

Observar solamente lo que los estudiantes presentan como demostración, ya sea como investigador o como profesor, es perder evidencia de la actividad demostrativa que realizan. En ella se ve lo que han aprendido los estudiantes respecto a la matemática y al proceder matemáticamente. En el curso de la actividad demostrativa los estudiantes fueron decantando los que serían pasos de la demostración, pero es todo el proceso realizado lo que les permitió producir el teorema: reconocer la afirmación que debían demostrar, identificar la teoría que sustenta su validez y producir la demostración misma sujeta a esa teoría. Esto último lo afirmamos porque, aun cuando les faltó justificar la validez de una afirmación, ellos reconocen que el proceso deductivo no es completo. Pero, dado que no tenían ese elemento en el sistema teórico disponible y que reconocen la ruptura que ello produce, evaluamos esa producción como exitosa.

La asociación que establecimos entre los aspectos teleológico, comunicativo y epistémico del modelo de Morselli y Boero [5], y nuestra caracterización de participación relevante y autónoma, fue útil para evaluar el aprendizaje de los estudiantes en términos de la actividad matemática desplegada. Reconocemos, sin embargo, la necesidad de ahondar más en los vínculos entre los dos marcos de referencia, pues en algunos momentos no pudimos correlacionar de manera específica la participación relevante con el aspecto teleológico o la participación autónoma con el aspecto epistémico.

Referencias

[1] Mariotti M.A., "Proof and proving in mathematics education", in *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (Eds. Gutiérrez A. y Boero P.), The Netherlands: Sense Publishers (2006).

[2] Mariotti M.A., Bartolini Bussi M.G., Boero P., Ferri F. and Garuti M.R., "Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition", in *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Ed. Pehkonen, E.), Lahti, Finlandia: University of Helsinki (1997).

[3] Molina Ó., Samper C., Perry P., Camargo L. y Echeverry A., "Estudio del cuadrilátero de Saccheri como pretexto para la construcción de un sistema axiomático local", *UNION Rev. iberoamericana de educación matemática,* 24 (2010), 117–134. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/24/ Union_024_012.pdf

[4] Moore R.C., "Making the transition to formal proof", *Educational Studies in Mathematics* 27 (1994), 249–266.

[5] Morselli F. and Boero P., "Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of

proof", in *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Eds. Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. y Arzarello, F.), Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique (2009). Disponible en: http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/working-group-2

[6] Perry P., Samper C. y Camargo L., "Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave", *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri, IberoCabri*, (2006). Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/929/

[7] Selden J. and Selden A., "Understanding the proof construction process", *Proceedings of ICMI Study 19, Proof and Proving in mathematics education* 2 (2009), 196–201.

[8] Sfard A., *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional.* (Patricia Perry y Luisa Andrade, editoras de la traducción al castellano). Santiago de Cali, Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle (2008).